19.02.2016

Απόδειξη: (Συνέχεια απόδειξης το ΛΗΜΜΑΤΟΣ, του προηγούμενου μαθ)

2 Αν $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} z \in [x]_R \text{ κ} \\ z \in [y]_R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \sim_R x \text{ κ} \\ z \sim_R y \end{cases}$ Τότε από τη

μεταβατική ιδιότητα $\rightarrow x \sim_R y$ και άρα από το 1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow [x]_R = [y]_R$

• Αν $x \in X$, τότε $x \in [x]_R$ και το x καλείται αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας του x. Αν $x \sim_R y$, τότε $[x]_R = [y]_R$ και το y είναι επίσης αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας του x #

Παράδειγμα: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε μια σχέση "$\sim_n$" στο $\mathbb{Z}$ ως εξής: $\forall x, y \in \mathbb{Z}: x \sim_n y \Leftrightarrow n \mid x-y$
Εύκολα βλέπουμε ότι η σχέση "$\sim_n$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$, η οποία καλείται <u>σχέση ισοτιμίας modn</u>. #

• Για κάθε $x \in \mathbb{Z}$: $[x]_n = [x]_{\sim_n} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \sim_n x\} =$

$\{y \in \mathbb{Z} \mid n \mid y-x\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: y-x = kn\} =$
$\{y \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: y = x+kn\} = \{x+kn \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

⑥

<u>Για παράδειγμα:</u> αν $n=5$, τότε:

$[4]_5 = \{4+5\kappa \in \mathbb{Z} \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$

$[19]_5 = [4]_5$, διότι $19 \sim_5 4$ και άρα το 19 είναι επίσης αντιπρόσωπος της $[4]_5$. #

<u>Σύνολο πηλίκο:</u> $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/_{\sim_n} = \{[x]_n \subseteq \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\}$

Προφανώς: $\{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n$

Έστω $[x]_n \in \mathbb{Z}_n$. Από την Ευκλείδεια Διαίρεση του x με το n: $x = q \cdot n + r$, $0 \leq r \leq n-1$
Θα έχουμε $x - r = q \cdot n \Rightarrow n \mid x - r \Rightarrow x \sim_n r \Rightarrow$
$\Rightarrow [x]_n = [r]_n$

Άρα επειδή $0 \leq r < n-1 \Rightarrow \mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n$

Αν $0 \leq \kappa, \lambda \leq n-1$ και $[\kappa]_n = [\lambda]_n \Rightarrow \kappa \sim_n \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow n \mid \kappa - \lambda \Rightarrow n \leq \kappa - \lambda$. Αυτό μπορεί να συμβεί, μόνο αν $\kappa - \lambda = 0 \Rightarrow \kappa = \lambda$. #

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Στο σύνολο $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, ορίζουμε την ακόλουθη σχέση:
$\forall (m,n), (m',n') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : (m,n) \sim_R (m',n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$

<u>Ισχυρισμός:</u> η σχέση R, είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(m,n) \sim_R (m,n)$, ισχύει διότι: $m + n = n + m$.

- $\forall (m,n), (m',n') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, έστω ότι: $(m,n) \sim_R (m',n') \Rightarrow$
$\Rightarrow m+n' = n+m' \Rightarrow m'+n = n'+m \Rightarrow (m',n') \sim_R (m,n)$

- Έστω $(m,n), (m',n'), (m'',n'') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ και έστω ότι

$$\left.\begin{matrix} (m,n) \sim_R (m',n') \\ \text{και} \\ (m',n') \sim_R (m'',n'') \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} m+n' = n+m' \\ \text{και} \\ m'+n'' = n''+m'' \end{cases}$$

Τότε:

$$\left.\begin{matrix} m+n'+n'' = n+m'+n'' \\ \\ m'+n'' = n'+m'' \end{matrix}\right\} \Rightarrow m+\cancel{n'}+n'' = n+\cancel{n'}+m'' \Rightarrow$$

$\Rightarrow m+n'' = n+m'' \Rightarrow (m,n) \sim_R (m'',n'')$

Ισχύουν και οι 3 ιδιότητες: (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική) οπότε η R είναι σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ #

<u>Ισχυρισμός:</u> Υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση
$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 /_R \to \mathbb{Z}$, $f([m,n]_R) = n-m$

* $(m,n) \sim_R (m',n') \Leftrightarrow m+n' = n+m' \Leftrightarrow m-n = m'-n'$
Άρα τα δυο στοιχεία σχετίζονται μόνο όταν *.

* Αν θέλω να ορίσω μια $f: X \to Y$, είναι "καλά ορισμένη" αν-ν $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ *

$[(m,n)]_R = [(m',n')]_R \Rightarrow (m,n) \sim_R (m',n') \Rightarrow m+n' = n+m'$
$\Rightarrow m-n = m'-n' \Rightarrow f([(m,n)]_R) = f([(m',n')]_R) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η f: καλά ορισμένη απεικόνιση.

⑧

• Έστω $f([(m,n)]_R) = f([(m',n')]_R)$. Τότε: $m-n = m'-n' \Rightarrow$
$\Rightarrow m+n' = m'+n \Rightarrow (m,n) \sim_R (m',n') \Rightarrow [(m,n)]_R = [(m',n')]_R$
$\Rightarrow f: 1\text{-}1$.

• Έστω $z \in \mathbb{Z}$

– αν $z \geq 0$, δηλαδή $z \in \mathbb{N}_0$, τότε $[(z,0)]_R \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / R$ και
$f([(z,0)]_R) = z - 0 = z$.

– αν $z < 0$, τότε $-z \in \mathbb{N}_0$. Τότε: $[(0,-z)]_R \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / R$ και
$f([(0,-z)]_R) = 0 - (-z) = z$

Άρα η f: επί. #

Παράδειγμα: Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, όπου $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, ορίζουμε μια σχέση R ως εξής:
$\forall (m,n), (r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (m,n) \sim_R (r,s) \Leftrightarrow m \cdot s = n \cdot r$

Εύκολα βλέπουμε ότι η σχέση R είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

• Έστω ότι $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, και έστω ότι $m \neq 0$.
Αν $d = (m,n) = \text{ΜΚΔ}(m,n) \Rightarrow \left.\begin{matrix} d \mid m \\ d \mid n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} m = dm' \\ n = dn' \end{matrix}\right.$

Ισχυρισμός: $(m,n) \sim_R (m',n')$ και $\text{ΜΚΔ}(m',n') = 1$

$\left.\begin{matrix} m \cdot n' = d \cdot m' \cdot n' \\ n \cdot m' = d \cdot n' \cdot m' \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \cdot n' = n \cdot m' \to (m,n) \sim_R (m',n')$

Θα περιγράψουμε την κλάση ισοδυναμίας $[(m,n)]_{R}$.
Επειδή το $(m,n) \sim_{R} (m',n')$, όπου $\text{ΜΚΔ}(m',n')=1$
$\Rightarrow [(m,n)]_{R} = [(m',n')]_{R}$, μπορούμε να υποθέσουμε
ότι $\text{ΜΚΔ}(m,n)=1$, όπου $\text{ΜΚΔ}(m',n'=1$.

$[(m,n)]_{R} = \{ (r,s) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \setminus (r,s) \sim_{R} (m,n) \} =$

$= \{ (r,s) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid m\cdot s = n\cdot r \}$

Από τη σχέση $m\cdot s = n\cdot r$, θα έχουμε: $n \mid m\cdot s$
Επειδή $\text{ΜΚΔ}(m,n)=1$, από το Λήμμα του Ευκλείδη
$\Rightarrow n \mid s \Rightarrow \boxed{s = n\cdot k}$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

Τότε: $m\cdot s = n\cdot r \Rightarrow m\cdot n\cdot k = n\cdot r \underset{n\neq 0}{\Rightarrow} \boxed{r = m\cdot k}$.

Με βάση την ανάλυση που κάναμε, προκύπτει:

$[(m,n)]_{R} = \{ (mk, nk) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Ορίζουμε απεικόνιση $f: (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)_{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f([(m,n)]_{R}) = m/n$

Η f είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση, η οποία είναι
1-1 κ' επί

• $[(m,n)]_{R} = [(r,s)]_{R} \Rightarrow (m,n) \sim_{R} (r,s) \Rightarrow m\cdot s = n\cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow m/n = r/s \Rightarrow f([(m,n)]_{R}) = m/n \Rightarrow f([(m,n)]_{R}) =$
$= f([(r,s)]_{R}) \Rightarrow f$ καλά ορισμένη.

$f([(r,s)]_{R}) = r/s$.

(10)

• Έστω ότι $f([(m,n)]_R) = f([(r,s)]_R) \Rightarrow m/s = r/s \Rightarrow$
$\Rightarrow m\cdot s = n\cdot r \Rightarrow (m,n) \sim_R (r,s) \Rightarrow [(m,n)]_R = [(r,s)]_R$
Άρα η f 1-1

• Αν $m/n \in \mathbb{Q} \rightarrow m,n \in \mathbb{Z}$ κ' $n \neq 0$ τότε:

$f([(m,n)]_R) = m/n \Rightarrow f$-επί

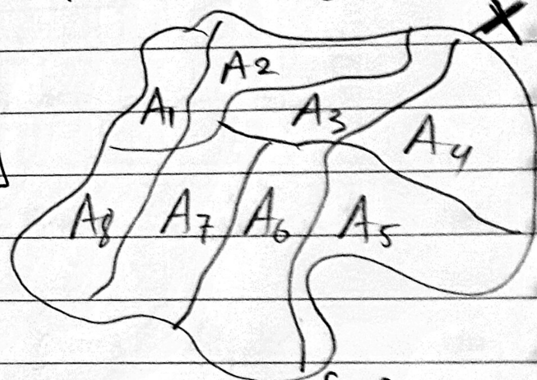
ΔΙΑΜΕΡΙΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Έστω X: τυχόν σύνολο. Μια διαμέριση του X, είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X, $\Delta = \{A_i\}_{i\in I}$, όπου $A_i \subseteq X$, $\forall i \in I$, έτσι ώστε:

α) $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$

β) $\forall i,j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, για $i \neq j$

γ) $X = \bigcup_{i\in I} A_i$



• $X = \{x\} \mapsto$ έχω μια διαμέριση $\Delta = X = \{x\}$

• $X = \{x,y\} \longrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = X = \{x,y\} \\ \Delta_2 = \{A_1 = \{x\}, A_2 = \{y\}\} \end{cases}$

• $X = \{x,y,z\} \longrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = X = \{x,y,z\} \\ \Delta_2 = \{A_1 = \{x,y\}, A_2 = \{z\}\} \\ \Delta_3 = \{A_1 = \{x,z\}, A_2 = \{y\}\} \\ \Delta_4 = \{A_1 = \{y,z\}, A_2 = \{x\}\} \\ \Delta_5 = \{A_1 = \{x\}, A_2 = \{y\}, A_3 = \{z\}\} \end{cases}$

(*) Για 4 στοιχεία έχει 15 διαμερίσεις?

① Αν $\mathcal{R}$: σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X, τότε:
$X/\mathcal{R} = \{ [x]_{\mathcal{R}} \subseteq X \mid x \in X \}$.

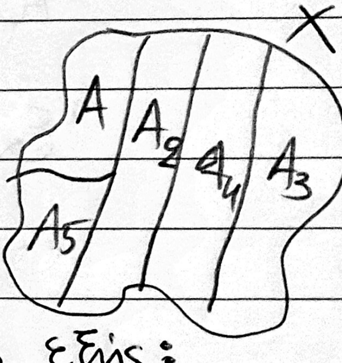
Τότε: α) $\forall x \in X : x \in [x]_{\mathcal{R}} \Rightarrow \forall x \in X : [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
β) Τα στοιχεία $[x]_{\mathcal{R}}$ του $X/\mathcal{R}$ είναι ανά 2 ξένα
γ) $X = \bigcup_{x \in X} [x]_{\mathcal{R}}$

Άρα η συλλογή υποσυνόλου $X/\mathcal{R}$ αποτελεί διαμέριση του X. Έτσι έχουμε μια απεικόνιση

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Σχέσεις ισοδυναμίας } \mathcal{R} \\ \text{επί του } X \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Διαμερίσεις} \\ \text{του } X \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R} \longmapsto X/\mathcal{R}$$

Έστω $\Delta = \{A_i\}_{i \in I}$: διαμέριση του X.



Ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$ στο σύνολο X ως εξής:
$\forall x, y \in X : x \sim_{\mathcal{R}} y \Longleftrightarrow \exists i \in I : x, y \in A_i$
Το $i \in I$ με την παραπάνω ιδιότητα είναι μοναδικό, διότι αν: $\exists i \in I : x, y \in A_i$, τότε: $x, y \in A_i \cap A_{i'}$. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν $i = i'$

Ισχυρισμός: Η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X.

(12)

α) $\forall\, x \in X: x \sim_{\mathcal{R}} x$ προφανώς, διότι $x \in X = \bigcup_{i \in I} A_i \to \exists\, i \in I:$ $x \in A_i$

β) Έστω $x, y \in X$ και $x \sim_{\mathcal{R}} y$. Τότε: $\exists\, i \in I: x, y \in A_i \to$ $\Rightarrow y \sim_{\mathcal{R}} x$

γ) Έστω $x, y, z \in X$ και

$$\left.\begin{matrix} x \sim_{\mathcal{R}} y \\ y \sim_{\mathcal{R}} z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \exists\, i \in I: x, y \in A_i \\ \exists\, i' \in I: y, z \in A_{i'} \end{matrix}\right.$$

Επειδή $y \in A_i \cap A_{i'}$ αναγκαστικά θα έχουμε $i = i'$, (διότι διαφορετικά θα είχαμε $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$: άτοπο!).

Άρα $x, y, z \in A_i \Rightarrow x \sim_{\mathcal{R}} z$

Άρα η $\mathcal{R}$: σχέση ισοδυναμίας.

Έχουμε ορίσει απεικονίσεις:

$$\Phi : \left\{\begin{matrix} \text{Σχέσεις ισοδυναμίας} \\ \text{επί του } X \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} \text{Διαμερίσεις} \\ \text{του } X \end{matrix}\right\},$$

$$\Phi(\mathcal{R}) = X/\mathcal{R} = \{ [x]_{\mathcal{R}} \subseteq X \mid x \in X \}$$

$$\Psi : \left\{\begin{matrix} \text{Διαμερίσεις} \\ \text{του } X \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Σχέσεις ισοδυναμίας} \\ \text{επί του } X \end{matrix}\right\}$$

$\Psi(\Delta) = \mathcal{R}_{\Delta}$, όπου $\forall\, x, y \in X: x \sim_{\mathcal{R}_{\Delta}} y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, i \in I ;\ x, y \in A$

Οι απεικονίσεις Φ, Ψ είναι 1-1 και επί και επιπλέον $\Psi = \Phi^{-1}$